Lineární algebra B2 — ukázková zkoušková písemka

Teoretická část

Upozornění.

- *U otázek, kde je požadováno vysvětlení/zdůvodnění, bude samotná odpověď (tj. bez odpovídajícího zdůvodnění) hodnocena* ***nula body*** *i kdyby byla správná.*
- *Všechna tvrzení uvádějte i* ***s předpoklady!***

1. (a) Definujte ortogonální (OG) doplněk $P \subset\subset V$.
   (b) Dokažte, že OG doplněk tvoří podprostor.
   (c) Platí následující implikace? Pokud některá z nich neplatí, uveďte protipříklad.
      i. Je-li Q OG doplněk P do V, pak $V = P \oplus Q$.
      ii. Jsou-li $P, Q \subset V$ takové, že $V = P \oplus Q$, pak Q je OG doplněk P do V.
   (d) Jsou-li $P, Q \subset V$, vysvětlete, co znamená $V = P \oplus Q$.

[3 body]

2. (a) Definujte spojnici dvou bodů v $\mathbb{R}^n$ a lineární varietu v $\mathbb{R}^n$.
   (b) Platí, že každý podprostor je lineární varietou? Vysvětlete nebo uveďte protipříklad.
   (c) Je každá lineární varieta podprostorem? Vysvětlete nebo uveďte protipříklad.

[3 body]

3. (a) Z následujících matic

$$\mathbb{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   vytberte ty (a svůj výběr zdůvodněte), které jsou
      i. regulární
      ii. unitární
      iii. symetrické
      iv. hermitovské
   (b) Napište, co bez počítání víte o spektru (vlastních číslech) regulárních, unitárních, symetrických a hermitovských matic.

[3 body]

Praktická část

1. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ a $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ jsou pro $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definované

$$A\vec{x} := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1-\beta \\ 1 & \alpha & -1 \\ -\alpha & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Rozhodněte, pro které hodnoty α, β je A regulární operátor.

   (b) Definujte a v závislosti na hodnotách α, β najděte $\ker A$.

   (c) Definujte $A^{-1}(\vec{b})$ a najděte jej pro ty hodnoty α, β, pro které A není regulární.

[5 bodů]

2. Pro které hodnoty parametru $\gamma \in \mathbb{R}$ je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná? Vysvětlete.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

[3 body]

3. Je-li to možné, doplňte vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ na OG bázi následujících podprostorů, pokud to možné není, vysvětlete proč.

   (a) $P = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

   (b) $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$

[3 body]

4. Nechť W_1 a W_2 jsou lineární variety v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$.

$$W_1 = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\alpha \qquad W_2 \equiv -2x - 4y + 3z = -9$$

   (a) Najděte parametrické rovnice W_1 a určete její dimenzi.

   (b) Zapište W_2 jako posunutý podprostor a určete její dimenzi.

   (c) Najděte parametrické i normálové rovnice průniku $W_1 \cap W_2$.

[5 bodů]