01LAL cv. 6 — Báze, souřadnice vektorů v bázi

Informace a pokyny:

1. Potřebné pojmy z teorie: báze, dimenze, souřadinice vektorů v bázi, důsledky Steinitzovy věty, věta o doplnění LN vektorů na bázi, věta o výběru báze z generátorů.
2. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = \mathbb{C}$.

Př. 1 **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je soubor vektorů z $\mathbb{C}^3$ a nechť $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ takové, že

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dokažte, že $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{C}^3$, a nalezněte $(\vec{x})_\mathcal{X}$.

Př. 2 **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou dvě báze $\mathbb{C}^3$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte $(\vec{x})_\mathcal{X}$, je-li $(\vec{x})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Př. 3 **[cvičení]** Nechť V_3 je vektorový prostor nad tělesem T. Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ je báze V_3 a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ je soubor vektorů z V_3 a $\vec{x} \in V_3$. Dokažte, že $\mathcal{Y}$ je také báze V_3, a najděte $(\vec{x})_\mathcal{Y}$, je-li

$$(\vec{y}_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, (\vec{y}_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, (\vec{y}_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad (\vec{x})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Př. 4 **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ jsou báze $\mathbb{C}^3$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^3$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (\vec{x})_\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(\vec{y}_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; (\vec{y}_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; (\vec{y}_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\vec{y})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Určete $(\vec{x} - 2\vec{y})_\mathcal{E}$ a $(\vec{x} - 2\vec{y})_\mathcal{X}$.

Př. 5 **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^{2,2}$.

(a) Doplňte vektory $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ na bázi $\mathcal{Y}$ prostoru $\mathbb{C}^{2,2}$,

(b) Nalezněte $(\mathbb{X})_{\mathcal{Y}}$, je-li $(\mathbb{X})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Př. 6 **[cvičení]** Nechť $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$.

Nechť $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4$ jsou vektory z $\mathbb{R}^{2,2}$, kde

$$(\mathbb{X}_1)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ (\mathbb{X}_2)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (\mathbb{X}_3)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ (\mathbb{X}_4)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Rozhodněte, zda $\mathcal{X} = (\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$. Vysvětlete.

(b) Vyberte bázi z generátorů $[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4]_\lambda$.

(c) Doplňte $\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ na bázi $[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3, \mathbb{X}_4]_\lambda$, je-li to možné.

(d) Nechť $(\mathbb{U})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Doplňte $\mathbb{U}, \mathbb{Z}$ na bázi $\mathbb{R}^{2,2}$, je-li to možné.

Př. 7 Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3)$ jsou báze $\mathcal{P}_3$ a nechť $x, y \in \mathcal{P}_3$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$x_1(t) = 2 + 2t - t^2, \ x_2(t) = 2 - t + 2t^2, \ x_3(t) = -1 + 2t + 2t^2.$$

Dále nechť

$$(y_1)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ (y_2)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ (y_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (x)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ (y)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Určete $(x - 2y)_{\mathcal{E}}$ a $(x - 2y)_{\mathcal{X}}$.

Př. 8 Nechť $\mathcal{Y} = (-\vec{e}_3, \vec{e}_2, 2\vec{e}_1)$, kde $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ je standardní báze prostoru $\mathbb{R}^3$. Nechť $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{y} = \vec{x}_2 - 3\vec{x}_3, \ \vec{z} = (\vec{y})_{\mathcal{Y}}.$$

(a) Najděte složky vektorů $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

(b) Určete, zda soubor $\mathcal{W} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$. Vysvětlete.

(c) Najděte $(\vec{y})_{\mathcal{W}}$, je-li to možné.

Př. 9 Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ je báze $\mathcal{P}_4$ a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ je soubor z $\mathcal{P}_4$, přičemž pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$x_1(t) = 1 + t, \quad x_2(t) = 1 - t, \quad x_3(t) = t^2 + t^3, \quad x_4(t) = t^2 - t^3,$$

$$(y_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \ (y_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ (y_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ (y_4)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Je $\mathcal{Y}$ báze $\mathcal{P}_4$? Vysvětlete.

(b) Najděte $(y)_\mathcal{X}$, je-li $y = y_1 - 5y_3$.

(c) Najděte – má-li taková úloha smysl – vektor $(z)_\mathcal{Y}$, je-li $(z)_\mathcal{X} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Př. 10 Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{R}^{2,2}$.

Nechť $\mathcal{Y} = (\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2, \mathbb{Y}_3, \mathbb{Y}_4)$ je soubor z $\mathbb{R}^{2,2}$, kde

$$(\mathbb{Y}_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\mathbb{Y}_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\mathbb{Y}_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (\mathbb{Y}_4)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Je $\mathcal{Y}$ báze $\mathbb{R}^{2,2}$? Vysvětlete.

(b) Najděte $(\mathbb{Y})_\mathcal{X}$, je-li $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_1 - 5\mathbb{Y}_3$.

(c) Najděte $(\mathbb{Z})_\mathcal{Y}$, je-li $(\mathbb{Z})_\mathcal{X} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ (pokud má taková úloha smysl).

Př. 11 Nechť $\mathcal{X} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right)$ jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$. Nechť $M = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]_\lambda$, kde

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \ (\vec{y})_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \ \vec{z} = (\vec{x} + \vec{y})_\mathcal{Y}.$$

V záslosti na $\alpha \in \mathbb{R}$:

(a) Určete dimenzi a bázi M.

(b) Rozhodněte, zda $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in M$.

Řešení úloh

Př. 1 $\mathcal{X}$ je báze a $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, neboť $\vec{x} = 2 \cdot \vec{x_1} - \vec{x_2} + 3 \cdot \vec{x_3}$.

Př. 2 $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Př. 3 $\mathcal{Y}$ je báze a $(\vec{x})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Př. 4 Je vhodné si uvědomit, že u vektorů z T^n platí $(\vec{x})_{\mathcal{E}} = \vec{x}$.

$(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}$, $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Př. 5 (a) např. $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$,

(b) potom $(\mathbb{X})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Př. 6 (a) $\mathcal{X}$ není báze, není LN, např. $-\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2 + \mathbb{X}_4 = \mathbb{O}$,

(b) $(\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3)$ je báze,

(c) $\mathbb{Z} \notin [\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3]_\lambda$,

(d) např. $\left(\mathbb{Z}, \mathbb{U}, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

Př. 7 Ze zadání plyne $(\vec{x}_1)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(\vec{x}_2)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(\vec{x}_3)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Příklad je tedy numericky totožný s **Př. 4** a proto je výsledek opět

$(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}$, $(\vec{x} - 2\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Př. 8 (a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathcal{W}$ je báze (dimenze $\mathbb{R}^3$ je rovna třem, takže stačí ověřit LN).

(c) $(\vec{y})_{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Př. 9 (a) $\mathcal{Y}$ je báze (stačí ověřit LN), (b) $(y)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \\ 18 \end{pmatrix}$, (c) $(z)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Př. 10 (a) $\mathcal{Y}$ je báze (stačí ověřit LN), (b) $(\mathbb{Y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$, (c) $(\mathbb{Z})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Př. 11 (a) pro $\alpha \neq 0$ je $\dim M = 3$, báze $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,
pro $\alpha = 0$ je $\dim M = 2$, báze $(\vec{x}, \vec{y})$,

(b) pro žádné α.