01LAL cv. 5 — Báze a dimenze vektorového prostoru

Informace a pokyny:

1. Potřebné pojmy z teorie: báze, dimenze, standardní báze prostorů T^n, $T^{m,n}$ a $\mathcal{P}_n$, důsledky Steinitzovy věty, věta o doplnění LN vektorů na bázi, věta o výběru báze z generátorů.

2. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = \mathbb{C}$.

Př. 1 **[cvičení]** Nechť

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

jsou vektory z $\mathbb{C}^4$. Nalezněte nějakou bázi $\mathcal{X}$ vektorového prostoru $\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5\right]_\lambda$ a poté vyjádřete vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5$ jako lineární kombinace vektorů $\mathcal{X}$.

Př. 2 **[cvičení]** V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete dimenzi následujícího lineárního obalu vektorů z $\mathbb{C}^4$:

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}\right]_\lambda .$$

Př. 3 **[cvičení]** Nechť

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

jsou vektory z $\mathbb{C}^4$. Nalezněte bázi $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, která obsahuje

(a) vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$, (b) vektory $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, (c) vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Př. 4 **[cvičení]** Nechť x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 jsou vektory z $\mathcal{P}$. Najděte bázi $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]_\lambda$, pokud pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3 - 4t + t^2 + 2t^3, \\ x_2(t) &= 5 + 26t - 9t^2 - 12t^3, \\ x_3(t) &= 2 - 5t + 8t^2 - 3t^3, \\ x_4(t) &= 2 + 3t - 4t^2 + t^3, \\ x_5(t) &= 1 + 2t + 3t^2 - 4t^3. \end{aligned}$$

Př. 5 **[cvičení]** Nechť $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{P}_5$. Najděte $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tak, aby $\dim [x_1, x_2, x_3]_\lambda < 3$, pokud pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + 4t - 2t^2 + 3t^3 + t^4, \\ x_2(t) &= 2 + 4t - 3t^2 - 2t^3 + 3t^4, \\ x_3(t) &= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + 11t^4. \end{aligned}$$

Př. 6 **[cvičení]** Nalezněte dvě báze $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ prostoru $\mathbb{R}^4$ tak, aby neměly žádný společný vektor, přičemž $\mathcal{X}$ bude obsahovat vektory $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ a $\mathcal{Y}$ vektory $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Př. 7 **[cvičení]** Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4$ jsou vektory z prostoru $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$. Určete dimenzi a najděte bázi $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$, je-li

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}3+2\mathrm{i}\\2-3\mathrm{i}\end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix}2-\mathrm{i}\\3+\mathrm{i}\end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix}3+4\mathrm{i}\\-1-5\mathrm{i}\end{pmatrix}, \ \vec{x}_4 = \begin{pmatrix}1-2\mathrm{i}\\1+3\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

Př. 8 Nechť V je vektorový prostor nad T. Nechť $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ je bází V nad T. Nalezněte všechny hodnoty α, pro které je soubor $(\vec{x} + \alpha\vec{y} - \vec{z}, 2\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}, \alpha\vec{x} + \vec{y})$ bází V.

Př. 9 Nechť $V = (0, +\infty)$, $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\vec{x} = x \in (0, +\infty)$ a $\vec{y} = y \in (0, +\infty)$ a pro každé $\alpha \in T$ definujeme

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = x \cdot y, \qquad \alpha \odot \vec{x} = x^\alpha.$$

Najděte bázi a dimenzi V.

Př. 10 Nechť $M \subset \mathbb{R}^{2,2}$, $M = \left[\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \right]_\lambda$.

(a) Vyberte bázi M z generátorů.

(b) Rozhodněte, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ lze následující dvě matice doplnit na bázi M. Pro taková α tyto dvě matice na bázi M doplňte.

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2 & -1\\2 & \alpha\end{pmatrix}.$$

Př. 11 Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$, $M = [x_1, x_2, x_3, x_4]_\lambda$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$x_1(t) = 1 + t + t^2, \quad x_2(t) = 1 - t + t^2, \quad x_3(t) = 1 + t + t^3, \quad x_4(t) = t.$$

(a) Vyberte bázi M z generátorů.

(b) Nechť $x, y \in \mathcal{P}_4$ takové, že

$$x(t) = 1 + \alpha t + t^2, \quad y(t) = 1 - \alpha t + t^2 \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

Rozhodněte pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ lze polynomy x, y doplnit na bázi M. Pro takové α tyto dva polynomy na bázi M doplňte.

Př. 12 Nechť V je podmnožina $\mathbb{C}^3$ složená z vektorů $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$, pro které platí:

(a) $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$,

(b) $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$.

Která z těchto množin je při zachování operací v $\mathbb{C}^3$ (tj. sčítání vektorů a násobení vektoru komplexním číslem po složkách) vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$? Vysvětlete a v pozitivním případě najděte dimenzi a bázi V.

Př. 13 Nechť V je podmnožina $\mathbb{C}^{2,2}$ složená z vektorů $\left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{smallmatrix}\right)$, pro které platí:

(a) $x_{11} + x_{22} = 1$,

(b) $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = 0$.

Která z těchto množin je při zachování operací v $\mathbb{C}^{2,2}$ (tj. sčítání matic a násobení matice komplexním číslem po prvcích) vektorovým prostorem nad $\mathbb{C}$? Vysvětlete a v pozitivním případě najděte dimenzi a bázi V.

Př. 14 Nechť $\mathbb{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{X}_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ jsou vektory z $\mathbb{C}^{2,2}$.

(a) Nalezněte bázi $\left[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3\right]_\lambda$, která obsahuje
i. $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, ii. $\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & i \end{pmatrix}$ a $\mathbb{Z} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) Pokud je to možné, doplňte $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3$ na bázi $\mathbb{C}^{2,2}$.

(c) Pokud je to možné, doplňte $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ na bázi $\mathbb{C}^{2,2}$.

Př. 15 Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ jsou vektory v $\mathbb{R}^4$ a nechť P je vektorový prostor, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

(a) Je-li to možné, doplňte vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ na bázi P.

(b) Doplňte vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ na bázi $\mathbb{R}^4$.

Př. 16 Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4 \in V$ a nechť $P = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4]_\lambda$,

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, \ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ \mathrm{Re}(\alpha) \\ 2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \ \vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2+\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Najděte dimenzi a bázi P v záslosti na $\alpha \in \mathbb{C}$, je-li

(a) $V = \mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{C}$,

(b) $V = \mathbb{C}^3$ nad $\mathbb{R}$.

Př. 17 Dokažte: Každý jednoprvkový soubor (y), kde $y \neq 0$ je číslo z tělesa T, je bází vektorového prostoru T nad T. Žádné jiné báze neexistují.

Př. 18 Najděte několik bází vektorového prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$.

Př. 19 Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných

(a) na intervalu $(0, \pi)$,

(b) na množině $\{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Najděte bázi $[f, g]_\lambda$, je-li $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$.

Řešení úloh

Př. 1 Báze např. $(\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_4)$, potom

$$\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= 1\cdot\vec{x}_1 + 0\cdot\vec{x}_2 + 0\cdot\vec{x}_4,\\
\vec{x}_2 &= 0\cdot\vec{x}_1 + 1\cdot\vec{x}_2 + 0\cdot\vec{x}_4,\\
\vec{x}_3 &= -\vec{x}_1 + 1\cdot\vec{x}_2 + 0\cdot\vec{x}_4,\\
\vec{x}_4 &= 0\cdot\vec{x}_1 + 0\cdot\vec{x}_2 + 1\cdot\vec{x}_4,\\
\vec{x}_5 &= \vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 1\cdot\vec{x}_4.
\end{aligned}$$

Př. 2 (a) Pro $\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -3$ je $\dim = 4$,
(b) pro $\alpha = 1$ je $\dim = 1$,
(c) pro $\alpha = -3$ je $\dim = 3$.

Př. 3 (a) Báze je např. $(\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$.
(b) Báze je např. $(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}_2)$ nebo $(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}_3)$.
(c) Báze obsahující $\vec{u}$ neexistuje.

Př. 4 Báze je např. (x_1, x_4, x_5) nebo (x_2, x_4, x_5) nebo (x_3, x_4, x_5).

Př. 5 $\alpha = 8$, $\beta = 20$, $\gamma = -13$.

Př. 6 Např. $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.

Př. 7 Dimenze je rovna třem a báze je např. $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

Př. 8 Báze pro $\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 3$.

Př. 9 Báze je jakékoliv kladné číslo různé od jedné dimenze V je rovna jedné.

Př. 10 (a) $\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$,
(b) doplnit na bázi lze zadané vektory pro $\alpha = 1$
$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -1\\2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$.

Př. 11 (a) (x_1, x_2, x_3) je báze M,
(b) pro $\alpha \neq 0$, (x, y, x_3) je báze M.

Př. 12 (a) V není vektorový prostor, např. $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \in V$, ale $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right) \notin V$,
(b) $V \subset\subset \mathbb{C}^3$, proto V je vektorový prostor, $\dim V = 2$, báze V je např. $\left(\left(\begin{smallmatrix}3\\0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)$.

Př. 13 (a) V není vektorový prostor, např. $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{smallmatrix}\right) \in V$, ale $2\cdot\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{smallmatrix}\right) \notin V$,
(b) $V \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$, proto V je vektorový prostor, $\dim V = 3$, báze V je např.
$\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\right)$.

Př. 14 (a) (i) nelze doplnit,
(ii) $(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$ je báze,

(b) nelze, jsou LZ,

(c) $(\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right))$ je báze $\mathbb{C}^{2,2}$.

Př. 15 (a) $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{p}_1)$ je báze P,

(b) $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{p}_1, \vec{e}_3)$ je báze $\mathbb{R}^4$.

Př. 16 (a) $P = \mathbb{C}^3$, báze např. standardní

(b) pro $\mathrm{Re}(\alpha) \neq 1$: báze $P = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4)$,
pro $\mathrm{Re}(\alpha) = 1$: báze $P = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_4)$.

Př. 17

Př. 18 Např. $(1, \mathrm{i})$ nebo každý soubor dvou nenulových komplexních čísel, kde jedno není reálný násobek druhého.

Př. 19 (a) Báze je např. soubor (f, g).

(b) Báze je např. soubor (g).