

Lineární (ne)závislost

Z teorie je třeba znát pojmy: lineární kombinace (triviální, netriviální), lineární (ne)závislost, lineární obal. Je nutné umět rozhodnout, zda má soustava lineárních algebraických rovnic řešení, a pokud má, tak umět alespoň jedno najít. Není-li uvedeno jinak, uvažujeme těleso komplexních čísel $T = \mathbb{C}$.

1. [cvičení] Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ z \mathbb{R}^3 LZ nebo LN.

(a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix},$

(b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$

(c) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. [cvičení] Nechtě $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ jsou LN vektory z V nad T . Zjistěte, zda vektory

$$\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}, 4\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}, 4\vec{x} + 13\vec{y} - 11\vec{z}$$

jsou LZ nebo LN.

3. [cvičení] Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, pro která jsou LZ vektory $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ z \mathbb{C}^3 .

4. [cvičení] Nechtě $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ jsou vektory z \mathbb{C}^3 . Zjistěte, který z vektorů \vec{x} a \vec{z} leží v $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5. Nechtě $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ jsou LN vektory z V nad T . Zjistěte, který z vektorů \vec{u} a \vec{v} leží v $[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li

$$\vec{x}_1 = -5\vec{y} + 4\vec{z}, \vec{x}_2 = \vec{x} + 2\vec{y} + 2\vec{z}, \vec{x}_3 = 2\vec{x} - \vec{y} + 8\vec{z}, \vec{u} = \vec{x} + 7\vec{y} - 2\vec{z}, \vec{v} = 2\vec{x} - \vec{z}.$$

6. [cvičení] Nechtě $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ a \vec{x} jsou vektory z \mathbb{R}^3 . Nalezněte všechny hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$, pro které $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, je-li

(a) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix},$

(b) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \alpha \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix},$

(c) $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ a $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ \alpha \end{pmatrix},$

$$(d) \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ a } \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2\alpha + 1 \end{pmatrix}.$$

7. **[cvičení]** Necht $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ jsou LN vektory z V nad T . Naleznete všechna $\alpha \in T$ taková, aby vektory $\vec{x} + 2\vec{y} + 3\vec{z}, -\vec{x} + \alpha\vec{z}, \vec{x} + 2\alpha\vec{y} + 8\vec{z}$ byly LZ a zároveň vektor $\alpha\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}$ ležel v jejich lineárním obalu.
8. **[cvičení]** Připomeňme nejprve, že \mathcal{P}_3 je vektorový prostor polynomů stupně nejvýše dva s přidáním nulového polynomu. Necht x a x_1, x_2, x_3 jsou polynomy z \mathcal{P}_3 tak, že pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$x_1(t) = 1 + t - 2t^2, \quad x_2(t) = 7 - 8t + 7t^2, \quad x_3(t) = 3 - 2t + t^2, \quad x(t) = 2 + 4t - t^2.$$

Zjistěte, zda $x \in [x_1, x_2, x_3]_\lambda$.

9. **[cvičení]** Jsou vektory x_1, x_2, x_3, x_4 z \mathcal{P} LN nebo LZ?

$$\forall t \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3t - 1 \\ x_2(t) &= 5t \\ x_3(t) &= t + 8 \\ x_4(t) &= t^2 - t + 1. \end{aligned}$$

10. **[cvičení]** Necht x_1, x_2, x_3 jsou vektory z \mathcal{P}_5 takové, že pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$x_1(t) = 1 + 4t - 2t^2 + 3t^3 + t^4, \quad x_2(t) = 2 + 4t - 3t^2 - 2t^3 + 3t^4, \quad x_3(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + 11t^4.$$

Zjistěte, pro jaké parametry $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ jsou vektory LZ.

11. Necht $x_1, x_2, x_3, x \in \mathcal{P}_3$. Platí $x \in [x_1, x_2, x_3]_\lambda$?

$$\forall t \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 1 + t - 2t^2 \\ x_2(t) &= 7 - 8t + 7t^2 \\ x_3(t) &= 3 - 2t + t^2 \\ x(t) &= 2 + 4t - t^2. \end{aligned}$$

12. **[cvičení]** Jsou vektory $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4$ z $\mathbb{C}^{2,2}$ LN nebo LZ?

$$\mathbb{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \mathbb{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

13. **[cvičení]** Jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ z $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$ LN nebo LZ?

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

14. Necht V je vektorový prostor nad \mathbb{R} , kde $V = (0, +\infty)$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ definujeme $\vec{x} \oplus \vec{y} = xy$ a $\alpha \odot \vec{x} = x^\alpha$. Rozhodněte, zda jsou vektory \vec{x}, \vec{y} LZ, pokud

- (a) $x = 1, y = 3$,
 (b) $x = 2, y = 3$,
 (c) vektory \vec{x} a \vec{y} jsou zvoleny libovolně.

15. Jsou LZ vektory

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2+2i \\ -1-i \end{pmatrix}$$

- (a) v \mathbb{C}^3 nad \mathbb{C} ?
- (b) v \mathbb{C}^3 nad \mathbb{R} ?

16. Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných na intervalu (a, b) , kde $a, b \in \mathbb{R}$, s operacemi definovanými bodově, tj. nechť $f, g \in V$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, pak definujeme

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad \text{a} \quad (\alpha \cdot f)(t) = \alpha \cdot f(t) \quad \text{pro každé } t \in (a, b).$$

Uvažujme nekonečnou spočetnou množinu $M = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots\}$, kde $e_1(t) = 1, e_2(t) = t, e_3(t) = t^2, e_4(t) = t^3$ pro každé $t \in (a, b)$. Čemu je rovna množina tvořená všemi lineárními kombinacemi konečně mnoha prvků z M ?

17. Uvažujme vektorový prostor V reálných funkcí definovaných

- (a) na intervalu $(0, \pi)$,
- (b) na množině $\{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Ověřte, že f, g jsou LN v případě (a) a LZ v případě (b), je-li $f(t) = \sin t, g(t) = \cos t$.

Výsledky: Lineární (ne)závislost

1. (a) LZ, např. $-\vec{x}_1 - 5\vec{x}_2 + 3\vec{x}_3 = \vec{0}$.
 (b) LN.
 (c) LZ, např. $-\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + 3\vec{x}_3 = \vec{0}$.
2. LZ, např. $8(\vec{x} - 2\vec{y} + \vec{z}) - 3(4\vec{x} - \vec{y} - \vec{z}) + (4\vec{x} + 13\vec{y} - 11\vec{z}) = \vec{0}$.
3. LZ $\Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = \sqrt{2} \vee \alpha = -\sqrt{2}$.
4. $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, např. $\vec{x} = 3\vec{x}_1 - \vec{x}_2$,
 $\vec{z} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$.
5. $\vec{u} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$, např. $\vec{u} = 3\vec{x}_2 - \vec{x}_3$,
 $\vec{v} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$.
6. (a) $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda \Leftrightarrow \alpha = 1$.
 (b) $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda \Leftrightarrow \alpha \neq -2$.
 (c) $\vec{x} \in [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$ vždy.
 (d) $\vec{x} \notin [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3]_\lambda$ nikdy.
7. LZ $\Leftrightarrow \alpha = 2 \vee \alpha = -4$, ale jen pro $\alpha = 2$ leží vektor $\alpha\vec{x} + 2\vec{y} + \vec{z}$ v lineárním obalu.
8. $x \notin [x_1, x_2, x_3]_\lambda$.
9. LZ, např. $8x_1 - 5x_2 + x_3 + 0x_4 = \mathcal{O}$.
10. LZ pro $\alpha = 8, \beta = 20, \gamma = -13$.
11. $x \notin [x_1, x_2, x_3]_\lambda$.
12. LN.
13. LN.
14. $\alpha \odot \vec{x} \oplus \beta \odot \vec{y} = \vec{0} \Leftrightarrow x^\alpha y^\beta = 1$
 (a) LZ zdůvodnění např. "mezi vektory je nulový vektor",
 (b) LZ zdůvodnění např. " $1 \odot \vec{x} \oplus (-\log_3 2) \odot \vec{y} = \vec{0}$ ",
 (c) vždy LZ, analogie předchozích bodů.

15. (a) LZ, např. $-2 \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \\ -i \end{pmatrix} + (1+i) \begin{pmatrix} 2 \\ 2+2i \\ -1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(b) LN, neboť neexistuje reálné řešení příslušné homogenní soustavy.

16. Množina je totožná s množinou reálných polynomů definovaných na (a, b) .