

Vektorový prostor

Z teorie je třeba znát: definici tělesa a vektorového prostoru nad T (pro $T = \mathbb{C}$ hovoříme o komplexním vektorovém prostoru, pro $T = \mathbb{R}$ o reálném vektorovém prostoru), vlastnosti vektorového prostoru plynoucí bezprostředně z definice. Dále je třeba znát pojmy: vektor, matice, polynom.

1. [cvičení] Necht' V je množina uspořádaných dvojic reálných čísel, těleso $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in V$ definujeme:

(a)

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \text{ a } \alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b)

$$\vec{x} \oplus \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a } \alpha \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}.$$

Je V s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad \mathbb{R} ?

2. [cvičení] Necht' V je množina kladných reálných čísel, tj. $V = \{x > 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$, těleso $T = \mathbb{R}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a každé $\vec{x}, \vec{y} \in V$ (tj. $\vec{x} = x > 0, \vec{y} = y > 0$) definujeme $\vec{x} \oplus \vec{y} = xy$ a $\alpha \odot \vec{x} = x^\alpha$. Je V s takto definovanými operacemi vektorovým prostorem nad \mathbb{R} ?

3. [cvičení] Necht' V je podmnožina \mathbb{C}^3 složená z vektorů $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pro které platí:

(a) $x_1 \in \mathbb{R}$,

(b) $x_1 = 0$,

(c) $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$,

(d) $x_1 + x_2 = 0$,

(e) $x_1 + x_2 = 1$,

(f) $x_1 = x_2 \wedge x_1 \neq x_3$,

(g) všechny složky jsou reálné,

(h) $x_1 = x_2$,

(i) $x_1 \neq x_2$,

(j) $x_1 + 2x_3 = 0$,

(k) $x_1 + 2x_3 = 1$.

Která z těchto množin je vektorovým prostorem nad \mathbb{C} při zúžení operací z \mathbb{C}^3 na V (tj. sčítání vektorů a násobení vektoru komplexním číslem po složkách)?

4. [cvičení] Necht' V je podmnožina $\mathbb{R}^{2,2}$ tvořená

(a) tzv. symetrickými maticemi, tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}, a_{12} = a_{21} \right\},$$

(b) tzv. diagonálními maticemi, tj.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zjistěte, zda V je vektorovým prostorem nad \mathbb{R} při zúžení operací z $\mathbb{R}^{2,2}$ na V (tj. sčítání matic a násobení matice reálným číslem po prvcích).

5. [cvičení] Necht' \mathcal{P} je množina polynomů s operacemi definovanými bodově, tj. pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$ a každý polynom $x \in \mathcal{P}$ a $y \in \mathcal{P}$ definujeme:

$$(x \oplus y)(t) = x(t) + y(t) \quad \text{a} \quad (\alpha \odot x)(t) = \alpha x(t) \quad \text{pro každé } t \in \mathbb{C}.$$

Víme z přednášky, že \mathcal{P} tvoří vektorový prostor nad \mathbb{C} . Která z následujících množin tvoří při zúžení operací z \mathcal{P} vektorový prostor nad \mathbb{C} ?

- (a) $\{x \in \mathcal{P} \mid x(0) - x(i) = 0\}$,
 - (b) $\{x \in \mathcal{P} \mid (\forall t \in \mathbb{C})(x(t) = x(t+1))\}$,
 - (c) $\{x \in \mathcal{P} \mid x \text{ má stupeň tři}\}$,
 - (d) $\{x \in \mathcal{P} \mid 0, 1, 2 \text{ jsou kořeny } x\}$.
6. Uvažujme množinu V reálných posloupností s operacemi definovanými po členech, tj. necht' $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jsou reálné posloupnosti a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak definujeme:

$$a \oplus b = (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{a} \quad \alpha \odot a = (\alpha a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dokažte, že V je vektorovým prostorem nad \mathbb{R} .

Dále dokažte, že při zúžení operací z V na danou podmnožinu (tj. sčítání posloupností a násobení posloupnosti reálným číslem po členech), platí:

- (a) Podmnožina tvořená posloupnostmi s prvními deseti členy nulovými tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
 - (b) Podmnožina tvořená posloupnostmi s prvním členem nenulovým netvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
 - (c) Podmnožina tvořená posloupnostmi s konečným počtem nenulových členů tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
 - (d) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nekonečným počtem nulových členů netvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
 - (e) Podmnožina tvořená posloupnostmi s nulovou limitou tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
 - (f) Podmnožina tvořená konvergentními posloupnostmi s nenulovou limitou netvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
7. Uvažujme množinu V reálných funkcí definovaných na intervalu (a, b) , kde $a, b \in \mathbb{R}$, s operacemi definovanými bodově, tj. necht' $f, g \in V$ a necht' $\alpha \in \mathbb{R}$, pak definujeme:

$$(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t) \quad \text{a} \quad (\alpha \odot f)(t) = \alpha f(t) \quad \text{pro každé } t \in (a, b).$$

Dokažte, že V je vektorovým prostorem nad \mathbb{R} . Dále dokažte, že při zúžení operací z V na danou podmnožinu (tj. sčítání funkcí a násobení funkce reálným číslem bodově), platí:

- (a) Podmnožina tvořená omezenými funkcemi tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .
- (b) Podmnožina tvořená funkcemi s tzv. konečným nosičem, tj.

$\{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{existuje konečná } X \subset (a, b) \text{ taková, že } f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in (a, b) \setminus X\}$,
tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .

- (c) Podmnožina tvořená polynomy s reálnými koeficienty tvoří vektorový prostor nad \mathbb{R} .

Výsledky: Vektorový prostor

1. Není vektorový prostor.
 - (a) Neplatí např. axiom o násobení jedničkou.
 - (b) V prostoru neexistuje nulový vektor.
2. V je vektorový prostor nad \mathbb{R} .
3. Stačí prověřit uzavřenost. Vektorové prostory nad \mathbb{C} jsou (b), (d), (h), (j).
4. (a), (b) Jsou to vektorové prostory. Stačí prověřit uzavřenost, protože $\mathbb{R}^{2,2}$ je vektorový prostor nad \mathbb{R} .
5. (a), (b), (d) jsou vektorové prostory. Stačí prověřit uzavřenost.
6. Pro V je třeba prověřit uzavřenost vůči operacím i axiomy. Pro podmnožiny stačí prověřit uzavřenost.
7. Pro V je třeba prověřit uzavřenost vůči operacím i axiomy. Pro podmnožiny stačí prověřit uzavřenost.