01LAL cv. 13a — Duální báze vektorového prostoru

Potřebné pojmy z teorie: lineární funcionál, duální báze, Věta o duální bázi.

Př. 1 Najděte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$, je-li $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$ je definovaný

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1 + x_2 - x_3.$$

Př. 2 Najděte $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$, kde

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right),$$

je-li $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$ je definovaný

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1 - x_2 + 2\mathrm{i}x_3,$$

Př. 3 Nechť $\varphi \in \mathcal{P}_4^\#$ je definovaný

$$\varphi(x) = 2\alpha_0 + \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 + 2\alpha_3 + x(-1),$$

kde

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 \quad \forall t \in \mathbb{C} \qquad \text{a} \qquad (x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix},$$

kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ je báze $\mathcal{P}_4$ taková, že

$$x_1(t) = 1 + t, \quad x_2(t) = 1 - t, \quad x_3(t) = t^2 - t^3, \quad x_4(t) = t^2 + t^3 \qquad \forall t \in \mathbb{C}.$$

Najděte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$ a $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$.

Př. 4 Nechť $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$ a nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^3$.

a) Najděte $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#}$, je-li $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) Najděte $(\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$, je-li $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Př. 5 Nechť $\varphi \in (\mathcal{P}_2)^\#$. Nechť $\mathcal{X} = (x_1, x_2)$ a $\mathcal{Y} = (y_1, y_2)$ jsou báze $\mathcal{P}_2$, kde

$$\forall t \in \mathbb{C} \qquad \begin{aligned} x_1(t) &= 1 + t, \quad y_1(t) = 1 - 2t, \\ x_2(t) &= 1 - t, \quad y_2(t) = 3 + 2t. \end{aligned}$$

Najděte $(\varphi)_{\mathcal{Y}^\#}$, je-li $(\varphi)_{\mathcal{X}^\#} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Př. 6 Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{C}^3)^\#$ jsou takové, že

$$(\varphi_1)_{\mathcal{E}^\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad (\varphi_2)_{\mathcal{X}^\#} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 - 2x_3,$$

kde $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ je báze $\mathbb{C}^3$. Jsou $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ LN?

Př. 7 Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \in (\mathcal{P}_4)^{\#}$, kde pro každé $x \in \mathcal{P}_4$ platí

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= x(1) - x(0) \\
\varphi_2(x) &= x(2) \\
\varphi_3(x) &= 2x(1) - 3x(2) \\
\varphi_4(x) &= 2x(0) + x(1) + 4x(2).
\end{aligned}$$

Jsou $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ LN?

Řešení úloh

Př. 1 $(\varphi)_{\mathcal{E}\#} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Př. 2 $(\varphi)_{\mathcal{X}\#} = \begin{pmatrix} 7-2\mathrm{i} \\ -6+4\mathrm{i} \\ 7+8\mathrm{i} \end{pmatrix}$

Př. 3 $(\varphi)_{\mathcal{X}\#} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(\varphi)_{\mathcal{E}\#} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Př. 4 a) $(\varphi)_{\mathcal{X}\#} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, b) $(\varphi)_{\mathcal{E}\#} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Př. 5 $(\varphi)_{\mathcal{Y}\#} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Př. 6 Ano, jsou lineárně nezávislé.

Př. 7 Ne, jsou lineárně závislé.