Soustavy lineárních algebraických rovnic

V celé kapitole budeme uvažovat pouze reálná čísla.

Z teorie je třeba znát pojmy: soustava m lineárních algebraických rovnic o n neznámých, (rozšířená) matice soustavy, homogenní soustava, triviální a netriviální řešení homogenní soustavy, ekvivalentní úpravy. Dále je třeba umět rozhodnout, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najít jedno řešení.

1. **[cvičení]** Rozhodněte, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

   (a)
   $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 1 \\ 2x & - & 2y & & & = & 2 \\ & & y & - & 3z & = & 0 \end{array}$$

   (b)
   $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 1 \\ 2x & - & 2y & & & = & 3 \\ & & y & - & 3z & = & 0 \end{array}$$

   (c)
   $$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 1 \\ & & y & - & 3z & = & 0 \end{array}$$

2. **[cvičení]** Rozhodněte, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

   (a)
   $$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & -1 \\ x & + & y & = & 2 \\ -2x & + & y & = & -1 \end{array}$$

   (b)
   $$\begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & -1 \\ x & + & y & = & 2 \\ -2x & + & y & = & -1 \end{array}$$

3. **[cvičení]** Rozhodněte, zda má homogenní soustava i netriviální řešení, a pokud ano, najděte jedno takové řešení.

   $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x & + & 14y & & & + & 11u & = & 0 \\ 13x & + & 36y & - & 10z & + & 19u & = & 0 \\ 3x & + & 25y & - & 19z & + & 2u & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & + & 5u & = & 0 \end{array}$$

4. **[cvičení]** Rozhodněte, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

   $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 7y & + & 3z & + & u & = & 6 \\ 3x & + & 5y & + & 2z & + & 2u & = & 4 \\ 9x & + & 4y & + & z & + & 7u & = & 2 \end{array}$$

5. **[cvičení]** Rozhodněte, zda je rovnice řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

   $$2x + y - z + u - 3v = 1$$

6. **[cvičení]** Rozhodněte, zda je soustava řešitelná, a pokud ano, najděte jedno řešení.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x & + & y & - & z & + & u & - & 3v = & 1 \\ -11x & + & 2y & & & - & u & + & 3v = & -1 \end{array}$$

7. Zjistěte, jakou podmínku musí splňovat parametry $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, aby následující soustava lineárních rovnic měla netriviální řešení.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ \alpha x & + & \beta y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

8. **[cvičení]** V závislosti na parametru λ rozhodněte, zda je soustava řešitelná.

   (a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} \lambda x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & 1 \end{array}$$

   (b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & + & 4u & = & 5 \\ 4x & - & 2y & + & 5z & + & 6u & = & 7 \\ 6x & - & 3y & + & 7z & - & \lambda u & = & 9 \\ \lambda x & - & 4y & + & 9z & + & 10u & = & 11 \end{array}$$

Výsledky: Soustavy lineárních rovnic

1. (a) řešení je tvaru $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde $s \in \mathbb{R}$

   (b) soustava nemá řešení

   (c) řešení je tvaru $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde $s \in \mathbb{R}$

2. (a) soustava nemá řešení

   (b) soustava má jediné řešení $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. řešení je tvaru $s \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $s, t \in \mathbb{R}$

4. řešení je tvaru $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $s, t \in \mathbb{R}$

5. řešení je tvaru $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $s, t, p, q \in \mathbb{R}$

6. řešení je tvaru $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $s, t, p \in \mathbb{R}$

7. právě, když $\alpha - \beta = -2$, každé řešení je pak tvaru $s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde $s \in \mathbb{R}$

8. (a) řešení existuje pro $\lambda \neq -2$
   (b) řešení existuje pro každé reálné λ